

ЛЕКЦИЯ 13

§ 13. Теңдеудің периодты шешімдері

Нақты сандар өсі $\mathbf{R}$ -де анықталған $f(t)$ функциясы берілсін. Егер ол үшін $\omega \in \mathbf{R}$ саны табылып, мына шарттар

$$\begin{aligned} 1) \quad & t - \omega, \quad t + \omega \in \mathbf{R}, \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ 2) \quad & f(t + \omega) = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1)$$

орындалатын болса, онда $f(t)$ функциясын $\mathbf{R}$ өсінде *периодты функция* (ω – *периодты функция*) деп, ал ω санын оның *периоды* деп атайды. Әлбетте ω – периодты функция мына теңдікті де қанағаттандырады: ($t - \omega \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ болғанда):

$$f(t - \omega) = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Демек, егер $k \in \mathbf{Z}$ үшін $t + k\omega \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}$ болса, $f(t + k\omega) = f(t), t \in \mathbf{R}$, орындалады яғни $k\omega, k \in \mathbf{Z}$, саны да $f(t)$ функциясының периоды болады. Периодты функцияның периоды деп оның ең кіші оң периодын атайды. Сондықтан, әдетте (1) теңдікте $\omega > 0$ деп есептейді.

Екінші ретті дифференциалдық теңдеу қарастырайық.

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}). \quad (2)$$

Егер $x = \varphi(t)$ функциясы оның $\mathbf{R}$ -дегі шешімі болса және $\exists \omega: t + \omega \in \mathbf{R}, \varphi(t + \omega) = \varphi(t), \forall t \in \mathbf{R}$ орындалатын болса, онда ол шешімді *периодты шешім* деп атайды.

$x = \varphi(t)$ – (2) теңдеудің $\mathbf{R}$ өсіндегі периодты шешімі болсын. Онда $\dot{\varphi}(t + \omega) = \dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t + \omega) = \ddot{\varphi}(t), \forall t \in \mathbf{R}$ болады да, $\ddot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)), \ddot{\varphi}(t) = f(t + \omega, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ теңдіктері алынады. Сондықтан $f(t + \omega, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = f(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)), \forall t \in \mathbf{R}$, яғни шешімнің бойында (2) теңдеудің оң жағы тәуелсіз айнымалы бойынша ω -периодты функция болады. Демек (2) теңдеудің периодты шешімі бар болуы үшін $f(t, x, \dot{x})$ функциясы t -дан айқын түрде тәуелді болып, осы t бойынша периодты функция болуы қажет.

Енді екінші ретті сызықтық біртекті теңдеу қарастырайық:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (3)$$

Мұнда $p(t), q(t) \in C\langle a, b \rangle, p(t + \omega) = p(t), q(t + \omega) = q(t), t + \omega \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}$. Сызықтық біртекті ауыстыру

$$x = e^{-\frac{1}{2} \int p(t) dt} y \quad (4)$$

арқылы (3) теңдеуді мына түрге

$$\ddot{y} + g(t)y = 0 \quad (5)$$

$g(t) = -\dot{p}(t)/2 - p^2(t)/4 + q(t)$ келтіруге болатыны белгілі (§1). Бұдан $g(t + \omega) = g(t), t + \omega \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}$ болатыны және (4) ауыстыру шешімнің периодтылығын сақтайтыны көрініп тұр.

Егер $g(t) = a^2$, $\forall t \in \mathbf{R}$ болса, (5) теңдеудің барлық шешімі $\frac{2\pi}{a}$ периодты болады:

$$y(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at. \quad (6)$$

Жалпылай айтылғанды кемітпей, $\omega = 2\pi$ деп есептеуге болады. Егер олай болмаса, $\tau = \frac{2\pi}{\omega}t$ ауыстыруы арқылы $p(t)$, $q(t)$ функцияларының периодын 2π етуге болады.

Енді екінші ретгі сызықтық біртекті емес

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) \quad (7)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $f(t)$ функциясын $\mathbf{R}$ -де үзіліссіз 2π – периодты және Фурье¹ қатарына жіктеледі деп есептелік. Бұл функцияны $[-\pi, \pi]$ аралығында қарастыру жеткілікті. Сонда

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (8)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k \in N.$$

Онда (7) теңдеудің периодты шешімін

$$x = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt), \quad t \in [-\pi, \pi] \quad (9)$$

түрінде іздейміз. Бұл қатарды формальды түрде екі рет дифференциалдап, (7) теңдеуге қойсақ,

$$a^2 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a^2 - k^2)(A_k \cos kt + B_k \sin kt) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$\forall t \in [-\pi, \pi]$$

тепе-теңдігін аламыз.

1. $a \neq n \in N$ болса, (9) қатардың коэффициенттері былай анықтала-ды:

$$A_0 = \frac{a_0}{a^2}, \quad A_k = \frac{a_k}{a^2 - k^2}, \quad B_k = \frac{b_k}{a^2 - k^2}, \quad k \in N. \quad (10)$$

Берілген $f(t)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан, (8) қатар $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты. Ал (9) қатарға A_0, A_k, B_k коэффициенттерінің табылған мәндерін қойғанда алынатын қатардың

$$x(t) = \frac{a_0}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (11)$$

мүшелерінің екінші ретгі туындысынан құрылған қатардың

¹ Фурье Ж.Б.Ж. (1786-1830) – француз математигі.

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

коэффициенттері, (8) қатардың сәйкес коэффициенттерінен мына көбейткішімен

$$\mu^k = -\frac{k^2}{a^2 - k^2} \Rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty$$

ғана өзгеше. Сондықтан (11) қатар $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты. Олай болса, (11) қатарды $[-\pi, \pi]$ кесіндісінде екі рет дифференциалдауға болады және

$$\ddot{x}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{a^2 - k^2} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Сонымен (11) қатар (7) теңдеуді формальды түрде емес, заңды түрде қанағаттандырады, яғни оның 2π – периодты шешімі болып табылады. Егер 2π – периодты (11) шешімге (7) теңдеудің біртекті бөлігінің жалпы шешімін, яғни (6) функциясын қоссақ, (7) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Ол шешім жалпы жағдайда, яғни C_1, C_2 тұрақтыларының кез-келген мәнінде, 2π – периодты болмайды. Себебі қосылғыштардың бір бөлігі $2\pi/a$ – периодты да, ал қалғандары 2π – периодты. Сондықтан 2π – периодты шешім алу үшін C_1, C_2 – лерді белгілі шарт бойынша табу керек, яғни тиісті бастапқы шарт қойылуы керек. Егер де (7) теңдеуде $f(t+2\pi) = f(t)$ болуымен қатар оған қойылған бастапқы шарт $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ арқылы анықталатын шешім $x(t_0 + 2\pi) = x(t_0), \dot{x}(t + 2\pi) = \dot{x}(t_0)$ шартын қанағаттандыратын болса, онда ол шешім 2π – периодты болады.

Шынында да, $\ddot{x}(t+2\pi) + a^2 x(t+2\pi) = f(t+2\pi) \equiv f(t)$. Жаңа функция енгізелік: $u(t) = x(t+2\pi) - x(t)$. Онда $\ddot{u} + a^2 u = \ddot{x}(t+2\pi) + a^2 x(t+2\pi) - (\ddot{x}(t) + a^2 x(t)) = f(t) - f(t) = 0$ және $u(t_0) = 0, \dot{u}(t_0) = 0$.

Сызықтық біртекті теңдеудің нөлдік шартты қанағаттандыратын шешімі болып тек қана нөлдік шешім табылады. Олай болса, $u(t) = 0, \forall t \in R$, яғни $x(t+2\pi) = x(t), \forall t \in R$.

2. $a = n \in N; a_n = b_n = 0$ болсын, яғни (8) қатарда n – қосылғыш болмасын. Қалған k – лар ($k \neq n$) үшін (9) қатардың коэффициенттері (10) формуладан табылады. Ал A_n және B_n коэффициенттері үшін кез-келген тұрақтыларды алуға болады. Себебі бұл жағдайда $A_n \cos t + B_n \sin t$ қосылғышы $\ddot{x} + n^2 x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Егер де a_n және b_n коэффициенттерінің біреуі, не екеуі бірдей нөлден өзгеше болса, онда (8) қатардың $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ қосылғышы-на (7) теңдеудің $t(A_n \cos nt + B_n \sin nt)$ дара шешімі сәйкес келеді. Себебі, $\gamma = \pm in$ саны – теңдеудің сипаттаушы $\lambda^2 + n^2 = 0$ теңдеуінің түбірлері (V тарау §2-ты қараңыз). Бұл жағдайда (11) қатардың қалған мүшелері периодты функция болғанмен, n – мүшесі периодты емес. Олай болса, (7) теңдеудің периодты шешімі жоқ.

Тұрақты a_n мен b_n қатарынан нөлге тең болмаған кезде, a коэффициенті бүтін n санына жақындаған сайын

$$A_n = \frac{a_n}{a^2 - n^2}, \quad B_n = \frac{b_n}{a^2 - n^2}$$

коэффициенттерінің біреуі, не екеуі бірдей шұғыл өседі. Бұл жағдай әдетте *резонанстық жағдай* деп аталады. Оның мәнісі – мына гармоникалық тербелістің

$$A_n \cos nt + B_n \sin nt = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin(t n + \varphi), \quad \varphi = \arctg \frac{A_n}{B_n}$$

амплитудасының шексіз өсуінде.

МЫСАЛДАР. Төмендегі теңдеулердің периодты шешімдерін табу керек.

$$1. \ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin kt$$

Мұнда $a = \sqrt{2} \neq n \in N$. Шешімді (9) қатар түрінде іздейміз. Сонда (10) формула бойынша

$$A_0 = 0, A_k = 0, B_k = \frac{1}{k^4(2-k^2)}, \text{ себебі } a_0 = 0, a_k = 0, b_k = \frac{1}{k^4}, k \in N.$$

Берілген теңдеудің периодты шешімі

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4(2-k^2)} \sin kt.$$

2. $\ddot{x} + 4x = \sin^2 t$, мұнда $a = 2$. Оң жағындағы функцияны Фурье қатарына жіктегенде алынатын a_2, b_2 коэффициенттерін анықталық:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cos 2t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) \cos 2t dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos 2t - \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \neq 0, \\ b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \sin 2t dt = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2t) d \cos 2t = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \cos^2 2t \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Периодты шешімінің бар болуының шарты орындалмай тұр. Олай болса, теңдеудің периодты шешімі жоқ.

$$3. \ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kt$$

Мұнда $a = 1$. Оң жағында тұрған қатардың бірінші мүшесі жоқ, яғни $a_1 = b_1 = 0$. Шешім болатын (9) қатардан $A_k, B_k, k \geq 2$ коэффициенттерін (10) формула бойынша табамыз, ал жоқ болып тұрған $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ қосылғышына сәйкес периодты шешім үшін біртекті $\ddot{x} + x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін аламыз. Сонда берілген теңдеудің периодты шешімі

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1-k^2)}$$

функциясы, C_1, C_2 – кез-келген тұрақты.

Жаттығулар

Төмендегі теңдеулердің периодты шешімін табыңыз:

$$1. \ddot{x} - 3x = f(t), \quad f(t) = |t|, \quad |t| \leq \pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

$$2. \ddot{x} + \dot{x} + x = |\sin t|.$$

Бақылау сұрақтары

1. Теңдеудің аналитикалық шешімдері деген не, оларды қалай құруға болады?
2. Дәрежелік қатардың, жалпыланған дәрежелік қатардың қандай қасиеттері бар, олардың шешім табу барысындағы маңызы қандай?
3. Периодты шешімдердің мағынасы, маңызы қандай?
4. Мына теңдеудің $\ddot{x} + a^2 x = f(t)$ периодты шешімдерін қай кезде, қалай құруға болады?
5. Резонанс ұғымы нені білдіреді, ол болған жағдайда қандай өзгеріс туады?